**15-1简谐运动** 2021年5月19日20点15分

**什么是物理？**

我们的世界充满了振荡,物体在其中反复往复运动.许多波动仅仅是有趣的或令人讨厌的,而其他许多波动则是危险的或在财务上很重要.以下是一些示例:当棒球棒击打棒球时,棒球棒可能会摆动得足以击打击球员的手,甚至破裂.当风吹过电线时,电线可能会剧烈振荡(电气工程术语为“疾驰”),以至于撕裂,从而切断了社区的电源.当飞机在飞行中时,流过机翼的空气的湍流使它们振荡,最终导致金属疲劳甚至失效.当火车绕弯道行驶时,车轮被迫向新的方向转动(您可以听到振动),车轮水平摆动(机械工程学上为“摆动”).

当城市附近发生地震时,建筑物的摆幅可能会剧烈,以至于被震撼.当从弓箭上射出箭时,由于箭头的摆动,箭尾的羽毛会在弓杆周围蜿蜒而不会被击中.当硬币掉入金属收集板上时,硬币会以熟悉的环振动,从而可以从声音中确定硬币的面额.牛仔竞技牛仔骑着公牛时,随着公牛的跳跃和转弯,牛仔会疯狂地摆动(至少牛仔希望摆动).

振动的研究和控制是物理学和工程学的两个主要目标.在本章中,我们讨论一种称为简单谐波运动的基本振动类型.

**小心**.对于大多数学生来说,这种材料具有很大的挑战性.原因之一是需要整理大量的定义和符号,但是主要原因是我们需要将物体的振荡(我们可以看到甚至体验到的)与振荡的方程式和图形相关联.将真实的,可见的运动与等式或图形的抽象相关联需要大量的工作.

**简谐运动**

图15-1显示了一个围绕轴原点振荡的粒子,该粒子反复向左和向右移动相同的量.振荡频率是每秒完成完整振荡(一个周期)的次数,其单位为赫兹(缩写为Hz),其中

一个完整周期的时间是振荡的周期,即

以规则区间重复的任何运动称为周期性运动或谐波运动.但是,这里我们对一种称为**简谐运动**(SHM)的特殊类型的周期性运动感兴趣.这样的运动是时间的正弦函数.即,可以将其写为时间的正弦或余弦.在这里,我们任意选择余弦函数,并将图15-1中粒子的位移(或位置)写为

其中和是我们将要定义的量.

**静止帧**. 让我们看一下运动的静止帧,然后在页面下一个接一个地排列它们(图15-2a).当粒子在轴上最右边的位置时,我们的第一个静止帧位于.我们将该坐标标记为(下标表示最大值);它是公式15-3中余弦函数前面的符号.在下一个静止帧中,粒子位于的左侧.它继续沿的负方向移动,直到到达最左端的坐标处.此后,随着时间的推移,我们进入了更多静止帧,粒子移回到处,此后在和之间反复振荡.在公式15-3中,余弦函数本身在+1和-1之间振荡.的值确定粒子在其振动中移动多远，称为振动**振幅**（如图15-3的便捷指南中所示）.

图15-2b在一系列静止帧中指示了粒子相对于时间的速.我们将很快获得有关速度的函数,但是现在请注意,粒子在极点处瞬间停止,并且在通过中心点时具有最大速度(最长速度矢量).

将图15-2a逆时针轻轻旋转90°,以便静止帧随时间向右移动.当粒子在处时,我们将时间t设置为0.当粒子开始下一个振荡周期时,粒子在时间t = T（振荡周期）返回xm.如果我们填充大量中间定格,并在粒子位置上画一条线,则余弦曲线将如图15-2d所示.我们已经注意到的速度显示在图15-2e中.整个图15-2中,我们所看到的是将所看到的（一个振动的粒子的现实）转换为一个图形的抽象。 （在WileyPLUS中，图15-2的转换可作为带有画外音的动画来使用。）公式15-3是在等式抽象中捕获运动的一种简洁方法.

**更多量**. 图15-3的便捷指南定义了有关运动的更多量.余弦函数的自变量称为运动的**相位**.随着时间的变化,余弦函数的值也会变化.常数称为**相角**或**相位常数**.仅在参数中是因为当我们将时钟时间设置为0时,无论粒子处于其振荡的哪个位置，我们都希望使用公式15-3来描述运动.在图15-2中,我们将t设置为0当粒子在处.对于该选择,如果我们还设置,则公式15-3可以很好地工作.但是,如果当粒子碰巧位于其他位置时将设置,则我们需要一个不同的值.图15-4中显示了一些值.例如,假设当我们恰好在处启动时钟时,粒子位于其最左端.然后,如果ϕ =πrad，方程15-3将描述运动。为了进行检验，将和ϕ =πrad代入公式15-3。看到，它此时才给出x = -xm。现在检查图15-4中的其他示例。

公式15-3中的量是运动的**角频率**.为了将其与频率和周期关联起来,首先要注意,粒子的位置必须(根据定义)必须在周期结束时返回其初始值.也就是说,如果是某个选定时间处的位置,则粒子必须在时间处返回该位置.让我们使用公式15-3表示此条件,但我们还要设置使其不受干扰.返回到相同位置可以写成

当其自变量(相)增加时,余弦函数会首先重复自身.因此,公式15-4告诉我们

或

因此,根据公式15-2,角频率为

角频率的SI单位是弧度每秒.

我们这里有很多量,可以通过实验改变量以查看对粒子SHM的影响.图15-5给出了一些示例.图15-5a中的曲线显示了改变振幅的效果.两条曲线具有相同的周期.(请参见“峰”如何排列?)且两者都针对.(请参见曲线的最大值如何均在处出现?)在图15-5b中,两条曲线的振幅相同,但一个周期是另一个周期的两倍(因此是另一个周期的一半).图15-5c可能更难以理解.曲线具有相同的振幅和相同的周期,但是由于值不同,一条曲线相对于另一条曲线发生了偏移.的正弦曲线如何看待?带有负的那个向右移动.这是一个普遍的结果:负值将规则余弦曲线向右移动,正值将规则余弦曲线向左移动.(在图形计算器上尝试.)

**SHM的速度**

我们简要地讨论了速度,如图15-2b所示,发现它在大小和方向上随粒子在极端点(速度暂时为零)和中心点(速度最大)之间移动而变化.为了找到速度作为时间的函数,让我们在公式15-3中采用位置函数的时间导数:

或

速度取决于时间,因为正弦函数随时间在值和之间变化.正弦函数前面的量决定了和之间速度变化的程度.我们说是速度变化的速度振幅.当粒子向右移动时,其速度为正,大小为该最大值.当它通过向左移动时,其速度为负,并且振幅再次达到该最大值.对于相位常数,此随时间的变化(负正弦函数)显示在图15-6b的图中,该常数对应于图15-6a中所示的位移与时间的余弦函数.

回想一下,无论粒子在处的位置如何,我们对使用余弦函数.我们简单地选择的适当值,以便公式15-3为我们在处给出正确的位置.余弦函数使我们得出方程15-6中的速度为负正弦函数,并且的值现在给出了时的正确速度.

**SHM的加速度**

通过在时间上对方程15-6的速度函数求微分,以得到简谐运动中粒子的加速度函数,我们又走了一步:

或

我们回到了余弦函数,但前面带有减号.加速度会发生变化,因为余弦函数会随时间在+1和-1之间变化.加速度的大小的变化由加速度振幅设定,即.

图15-6c显示了相位常数的公式15-7,与图15-6a和15-6b一致.请注意,当余弦为零时(即粒子位于时),加速度大小为零.当余弦值最大时(即粒子处于极限点时),加速度大小为最大.已减速至停止，因此其运动可以反转.确实,比较方程15-3和15-7我们看到了一种非常整齐的关系:

这是SHM的标志:（1）粒子的加速度始终与其位移相反(因此为负号),并且(2)两个量始终由常数关联.如果您在振荡情况下看到这种关系(例如,电路中的电流或潮汐湾中水的上升和下降),则可以立即说运动是SHM,并立即确定运动的角频率.简而言之:

**在SHM中,加速度与位移成正比,但符号相反,并且这两个量与角频率的平方相关**.

**简谐运动的力定律**

现在我们有了公式15-8中位移的加速度表达式,我们可以应用牛顿第二定律来描述负责SHM的力:

负号表示作用在粒子上的力的方向与粒子位移的方向相反.也就是说,在SHM中,力是与位移抗衡的一种恢复力,试图将粒子恢复到的中心点.我们已经在第8章中看到了公式15-9的一般形式,当我们讨论如图15-7所示的弹簧块时,请参见图8.在那里我们写下了胡克定律,

对于作用在块上的力.比较方程15-9和15-10,我们现在可以将弹簧常数(弹簧刚度的度量)与滑块的质量和SHM的角频率相关联:

公式15-10是编写SHM的标志公式的另一种方法.

简单谐波运动是当作用在粒子上的力与粒子的位移成正比,但与粒子的运动方向相反.

图15-7的块簧系统称为**线性简谐振荡器**(简称线性振荡器),其中线性表示与的一阶幂(而不与其他幂)成正比.

如果您看到振动中的力始终与位移成正比但方向相反的情况,则可以立即说出振动是SHM.您也可以立即识别相关的弹簧常数.如果知道振荡质量,则可以通过将公式15-11重写为以下公式来确定运动的角频率:

(这通常比k的值更重要.)此外,您可以通过组合方程15-5和15-12来确定运动的周期,

让我们赋予等式15-12和15-13一些物理意义.您能看到刚性弹簧(较大的k)会产生较大的(快速振荡),从而产生较小的周期T吗？您还可以看到较大的质量倾向于导致较小的（缓慢的振荡）,从而导致较大的周期T吗?

每个振动系统,无论是跳水板还是小提琴弦,都具有“弹性”的某些元素和“惯性”或质量的某些元素.在图15-7中,这些元素是分开的:弹性完全在弹簧中,我们假定是无质量的,而惯性则完全在块中,我们假定是刚性的.但是,在小提琴琴弦中,这两个元素都在琴弦内.

**15-2 简谐运动中的能量** 2021年5月20日19点48分——2021年5月27日11点06分

现在,让我们研究第8章的线性振荡器,在该振荡器中,能量在动能和势能之间来回传递,而两者的和(振荡器的机械能E)保持恒定.类似于图15-7的线性振荡器的势能与弹簧完全相关.其值取决于弹簧被拉伸或压缩的程度,即.我们可以使用公式8-11和15-3来找到

图15-7的系统的动能与滑块完全相关.它的值取决于滑块移动的速度,即.我们可以使用公式15-6来找到

如果我们使用公式15-12将替换为,则可以将公式15-19写为

机械能来自公式15-18和15-20,其为

.

由于

因此,上面方括号中的数量是1,我们有

线性振荡器的机械能确实是恒定的,并且与时间无关.线性振荡器的势能和动能在图15-8a中显示为时间的函数,在图15-8b中显示为位移x的函数.在任何振荡系统中,每一个弹性元件都需要被存储势能,而每一个惯性元件都需要被存储动能.

**15-3 角简谐振荡器** 2021年5月20日19点52分——2021年5月27日11点27分

图15-9给出了简谐振荡器的角度版本.弹性元素与吊线的扭曲有关,而不是与我们以前的弹簧的拉伸和压缩有关.该装置称为**扭转摆[torsion pendulum]**.

如果我们将图15-9中的磁盘从其静止位置(参考线位于)旋转某个角度位移并释放它,它将以**角简谐运动**在该位置附近振荡.将磁盘沿任一方向旋转角度会引入由下列公式引起从恢复扭力

此处的(希腊kappa)是一个常数,称为扭转常数,它取决于吊线的长度,直径和材料.

公式15-22与公式15-10的比较使我们怀疑公式15-22是胡克定律的角形式,并且我们可以将线性SHM周期的公式15-13转换成角SHM周期的形式:我们用等式15-13的常数κ代替公式15-13中的弹簧常数k，用等价物15的旋转惯量I代替等式15-13中的质量m.这些替换导致

**15-4 摆锤,循环运动** 2021年5月27日16点04分

**摆锤**

现在我们来看一类简单的谐波振荡器,其中弹性与重力有关,而不与双绞线或压缩或拉伸弹簧的弹性有关.

**简单的摆锤**

如果苹果在长螺纹上摆动,它是否具有简谐运动?如果是这样,那么周期是多少?为了回答这个问题,我们考虑一个简单的摆锤,它由质量的粒子(称为摆锤的鲍勃)悬挂在长度为的不可拉伸,无质量的弦的一端,该弦固定在另一端,如图15-11a所示.摆锤可以在页面的平面内自由摆动,并可以通过摆锤的枢轴点在垂直线的左侧和右侧移动.

**恢复扭矩**. 如图15-11b所示,作用在摆锤上的力是来自琴弦的力和重力,其中琴弦与垂直线成夹角.我们将分解为径向分量和与鲍勃所走路径相切的分量.该切向分量围绕摆的枢轴点产生恢复扭矩,因为该分量始终与摆锤的位移相反地起作用,以便使摆锤返回其中心位置.该位置称为平衡位置(),因为如果摆不摆动,则摆将处于静止状态.

从公式10-4,我们可以将该恢复转矩写为

其中的负号表示转矩起到减小的作用,而是力分量在枢轴点附近的力矩臂.将公式15-24代入公式10-44,然后将替换为,我们得到

其中,是摆在枢轴上的旋转惯性,而是摆在该点附近的角加速度.

如果假设角度小,我们可以简化公式15-25,因为这样我们就可以用近似表示正弦(以弧度表示).(例如,如果,那么,仅相差约0.1％。)通过这种近似和一些重新排列,我们得到

该公式与SHM的公式公式15-8等效.它告诉我们摆的角加速度与角位移成正比,但符号相反.因此,随着摆锤向右移动,如图15-11a所示,其向左的加速度增加,直到摆锤停止并开始向左移动.然后,当它在平衡位置的左侧时,其向右的加速度趋向于使其返回右侧,依此类推,因为它在SHM中来回摆动.更准确地说,仅摆动一个小角度的简单摆的运动大约为SHM.我们可以用另一种方式将这种限制陈述为小角度:运动的**角振幅**(最大摆动角度)必须很小.

**角频率**. 这是一个巧妙的把戏.因为公式15-26与SHM的公式15-8具有相同的形式,所以我们可以立即将摆的角频率确定为位移前面的常数的平方根:

在作业问题中,您可能会看到振荡系统看起来不像钟摆.但是,如果您可以将加速度(线性或角度)与位移(线性或角度)相关联,则可以像我们刚才所做的那样立即确定角频率.

周期. 接下来,如果将的表达式代入公式15-5(),则可以看到摆的周期可以写为

简单摆的所有质量都集中在质点鲍勃的质量中,该质量距枢轴点的半径为.因此,我们可以使用公式10-33()将写为摆的转动惯量.将其代入公式15-27并简化后得出

在本章中,我们假设小角度摆动.

**物理摆**

真实的钟摆,通常称为**物理钟摆**,可能具有复杂的质量分布.它也会进行SHM吗？如果是这样,它的期限是什么？图15-12显示了任意一个物理摆,该摆向一侧偏移了角度.重力作用在其质心C上,距枢轴点O的距离为h.15-12和15-11b揭示了任意物理摆和简单摆之间的一个重要区别.对于物理摆,重力的恢复分量的力矩臂绕枢轴点的距离为,而不是弦长L.在所有其他方面,对物理摆的分析都将重复我们对重力的分析.通过公式15-27进行简单摆.再次(对于较小的),我们将发现运动约为SHM.

如果在公式15-27中将替换为,则可以将周期写为

与简单的摆一样,是摆在上的转动惯量.但是,现在不仅是(取决于物理摆的形状),而且仍然与成正比.

如果物理摆在其质心处枢转,则不会摆动.形式上,这对应于在公式15-29中放入.然后,该方程式预测,这意味着这样的摆将永远不会完成一个挥杆动作.

对应于以周期T围绕给定的枢轴点O振荡的任何物理摆，都是一个长度为L0且周期为T的简单摆。我们可以通过公式15-28找到L0.沿物理摆的点与点O之间的距离L0为给定的悬挂点，称为物理摆的振荡中心。

**测量**

我们可以使用物理摆来测量地球表面特定位置的自由落体加速度.(在地球物理勘探过程中已经进行了无数的此类测量.)

要分析一个简单的情况,将摆锤做成一根长度为的均匀杆,从一端悬垂下来.对于这种摆,在公式15-29中的,枢轴点和质心之间的距离,为.表10-2e告诉我们,该摆围绕绕垂直线过其质心的旋转惯性为.从公式10-36的平行轴定理(),我们发现绕垂直轴通过杆一端的转动惯量为

如果在公式15-29中将且并求解,我们会发现

因此,通过测量和周期,我们可以找到摆位置的值.(如果要进行精确的测量,则需要进行一些改进,例如在真空室内摆动摆.)

**简谐运动和匀速圆周运动**

1610年,伽利略使用他新近建造的望远镜发现了木星的四个主要卫星.经过数周的观察,在他看来,每个月球似乎都相对于行星来回运动,今天我们称之为简谐运动.行星盘是运动的中点.实际上,伽利略亲眼所见的记录仍然可用.麻省理工学院的A. P. French使用伽利略的数据算出月球卡利斯托相对于木星的位置(实际上是从地球上看与木星的角距离),发现该数据近似于图15-14所示的曲线.该曲线强烈暗示了公式15-3,即简谐运动的位移函数.从该图可以测得大约16.8天的时间,但这是一个确切的时间？毕竟,月亮不可能像弹簧末端那样像块一样来回摆动,所以公式15-3为什么与此有关呢?

实际上,卡利斯托（Callisto）在木星周围基本呈圆形的轨道上以基本恒定的速度运动.它的真实运动(不是简单的谐波)是沿着该轨道的均匀圆周运动.伽利略所看到的-以及用一副好的双筒望远镜和一点耐心所能看到的-是这种匀速圆周运动在运动平面上的直线上的投影.伽利略（Galileo）出色的观察结果使我们得出这样的结论,即简单的谐波运动是从侧面观察到的均匀圆周运动.用更正式的语言:

**简谐运动是均匀圆周运动在发生圆周运动的圆的直径上的投影**.

图15-15a给出了一个示例.它示出了在参考圆中以(恒定)角速度匀速圆周运动的参考粒子.圆的半径是粒子位置矢量的大小.在任何时间,粒子的角位置均为,其中是其在时的角位置.

**位置**. 粒子在轴上的投影是点,我们将其视为第二个粒子.粒子的位置矢量在轴上的投影给出了的位置.(您能在图15-15a中看到三角形中的分量吗?)因此,我们发现

精确地是公式15-3.我们的结论是正确的.如果参考粒子以均匀的圆周运动运动,则其投影粒子沿着圆的直径以简谐运动运动.

**速度**. 图15-15b显示了参考粒子的速度.根据公式10-18(),速度矢量的大小为.它在轴上的投影是

恰好是公式15-6.出现负号是因为图15-15b中的速度分量在的负方向上指向左侧.(负号与公式15-36的时间导数一致.)

**加速度**. 图15-15c显示了参考粒子的径向加速度.根据公式10-23(),径向加速度矢量的大小为;它在轴上的投影是

恰好是公式15-7.因此,无论我们看位移,速度还是加速度,匀速圆周运动的投影确实是简谐运动.

**15-5 阻尼简单的谐波运动** 2021年5月20日20点11分

摆锤只会在水下短暂摆动,因为水会在摆锤上施加阻力,从而迅速消除运动.空气中的摆动更好,但运动最终还是消失了,因为空气在摆上施加了拉力(摩擦作用在其支撑点上),从摆的运动中转移了能量.

当通过外力减小振荡器的运动时,可以说振荡器及其运动被阻尼了.阻尼振荡器的理想示例如图15-16所示,其中质量为的块在弹簧常数为的弹簧上垂直振动.杆从该块延伸到浸没在液体中的叶片(均假定为无质量).当叶片上下移动时,液体会在叶片上并因此在整个振荡系统上施加抑制阻力.随着时间的流逝,随着能量转换为液体和叶片的热能,隔断弹簧系统的机械能会降低.

让我们假设液体所施加的**阻尼力**与叶片和滑块的速度成正比(这种假设在叶片缓慢移动时是准确的).然后,对于图15-16中沿轴的力和速度分量,我们有

其中是取决于叶片和液体的特性的**阻尼常数**,其SI单位为千克/秒.负号表示与运动方向相反.

**阻尼振荡**. 来自弹簧的滑块上的力为.让我们假设相对于和,块体上的重力可以忽略不计.然后,我们可以针对轴上的分量()编写牛顿第二定律,如下所示:

将替换为,将替换为,然后重新排列,得出微分方程

这个方程的解是

其中是振幅,是阻尼振荡器的角频率.该角频率由下式给出

如果(无阻尼),则对于无阻尼振荡器的角频率,公式15-43简化为公式15-12,并且公式15-42简化为公式15-3 用于无阻尼振荡器的位移.如果阻尼常数很小但不为零(即),则.

**阻尼能量**. 我们可以将公式15-42视为一个余弦函数,其振幅随时间逐渐减小,如图15-17所示.对于无阻尼振荡器,机械能是恒定的,由公式15-21给出.如果振荡器被阻尼,则机械能不是恒定的,而是随着时间而减小.如果阻尼很小,我们可以通过将方程15-21中的替换为(阻尼振荡的振幅)来找到.通过这样做,我们发现

这告诉我们,就像振幅一样,机械能随时间呈指数下降.

**15-6 强迫振动与共振** 2021年5月20日20点13分

一个人在没有任何人推动的情况下摆动秋千就是自由摆动的一个例子.但是,如果有人周期性地推动秋千,则秋千会强迫或驱动振动.有两个角频率与经历驱动振荡的系统有关：(1)系统的自然角频率,即系统突然受到扰动后自由振荡时将以其振荡的角频率;以及(2)引起驱动振荡的外部驱动力的角频率.

如果我们允许标记为“刚性支撑”的结构以可变角频率上下移动,则可以使用图15-16表示理想化的强制简单谐波振荡器.这种强制振荡器以驱动力的角频率振荡,其位移由下式给出:

其中是振荡振幅.

位移振幅有多大取决于和的复杂函数.振荡的速度振幅更易于描述:在以下情况下最大

一种叫做**共振**的情况.公式15-46也近似等于振荡的位移振幅最大的条件.因此,如果以自然的角频率推动秋千，位移和速度振幅将增加到很大的值，这是儿童通过反复试验快速学习的事实.如果以更高或更低的其他角频率推动,则位移和速度振幅将更小.

图15-18显示了对于阻尼系数的三个值,振荡器的位移振幅如何取决于驱动力的角频率.请注意，当时(公式15-46的谐振条件),这三个振幅的振幅都最大.图15-18的曲线表明,较小的阻尼会产生较高和较窄的共振峰.

**例子**. 所有机械结构都具有一个或多个自然角频率,如果结构受到与这些角频率之一匹配的强大外部驱动力,则结构的最终振动可能会使其破裂.因此,例如,飞机设计者必须确保机翼可以摆动的自然角频率与飞行中的发动机的角频率都不匹配.在某些发动机转速下猛烈拍打的机翼显然很危险.

共振似乎是1985年9月在墨西哥城西海岸发生大地震(里氏8.1级)时墨西哥城建筑物倒塌的原因之一.地震产生的地震波应该太弱了,以至于在到达约400公里以外的墨西哥城时造成广泛的破坏.但是,墨西哥城主要建在一个古老的湖床上,那里的土壤仍然被水软化.尽管在前往墨西哥城的较坚硬的地面中,地震波的振幅很小,但在该市的松散土壤中,地震波的振幅却大大增加了.波的加速度振幅高达0.20g,并且角频率(令人惊讶地)集中在3 rad/s附近.不仅地面剧烈振动,而且许多中等高度的建筑物也有大约3 rad/s的共振角频率.这些建筑物中的大多数建筑物在摇晃时倒塌(图15-19),而较短的建筑物(具有较高的共振角频率)和较高的建筑物(具有较低的共振角频率)保持不变.

在1989年旧金山-奥克兰地区的一次地震中,类似的共振振荡使高速公路的一部分坍塌,从而将上层甲板降到了下层甲板上.高速公路的那部分建在结构松散的泥土上.